Prof. Dr. Norbert Dragon
PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr

UND NOCH MEHR FOURIERTRANSFORMATION

Es gibt zur Fouriertransformation noch so viel zu entdecken, packen wir's an!

[P22] *Faltungssatz*
Wir wollen die Fouriertransformierte eines Produktes zweier Funktionen berechnen. Dazu benötigen wir den Begriff des Faltungsintegrals oder Faltungsproduktes $f \star g$ zweier quadratintegrabler Funktionen über $\mathbb{R}$,

$$\big(f \star g\big)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathrm{d}y\, f(y)\, g(x-y)\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass es symmetrisch, $f \star g = g \star f$, und distributiv, $(af_1 + bf_2) \star g = af_1 \star g + bf_2 \star g$, ist.

(b) Zeigen Sie den Faltungssatz,

$$\big(\widetilde{fg}\big)(k) = \big(\tilde{f} \star \tilde{g}\big)(k)\,.$$

[P23] *Gauß-Kurve*
Betrachten Sie eine an der Stelle x_0 zentrierte Gauß-Kurve der Varianz σ^2,

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)^2}\,.$$

(a) Berechnen Sie die Fouriertransformation der Standard-Gauß-Glocke $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$. Sie sollten $\tilde{f}(k) = \mathrm{e}^{-k^2/2}$ erhalten.

(b) Berechnen Sie die Fouriertransformierte der allgemeinen Gauß-Kurve und zeigen Sie

$$\tilde{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma k x_0}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\sigma k)^2}\,.$$

Verwenden Sie dazu die in der Vorlesung behandelten Eigenschaften der Fouriertransformation unter Translation und Skalierung der ursprünglichen Funktion.